El darrers capítols del llibre constitueixen una crònica dels remarcables intents realitzats per demostrar el darrer teorema de Fermat durant els darrers quaranta anys. En particular, l'autor dedica dos capítols al treball d'Andrew Wiles, els descobriments del qual durant la darrera dècada van deixar atònita la comunitat matemàtica. Singh assoleix plenament en aquests capítols allò que ell mateix declara que persegueix: «transmetre la creativitat i l'heroisme que va requerir durant deu anys l'experiència terrible de Wiles».

La meva opinió és que el llibre està molt ben estructurat i que l'autor s'ha documentat molt seriosament; és un estil de treballar al qual aquells que s'han dedicat a divulgar o difondre la matemàtica no sempre ens han acostumat. Llibre, doncs, excel·lent i recomanable a qualsevol persona capaç d'apassionar-se per la cerca de la veritat. Seria bo que els matemàtics professionals i els estudiants de llicenciatura no deixessin de llegir-lo i que hom el pogués trobar en les biblioteques dels seminaris de matemàtiques dels centres d'ensenyament secundari i superior.

Manuel Castellet
Centre de Recerca Matemàtica

Atenció

La SCM demana informació sobre les olimpíades matemàtiques

En aquests darrers anys, la SCM ha anat reconstruint l'arxiu de les olimpíades matemàtiques des que es van iniciar l'any 1963. Fins ara s'han aconseguit tots els enunciats dels problemes *excepte* cinc problemes de la primera fase de l'Olimpíada II, (1964-65); i un problema també de la primera fase de l'Olimpíada VI, (1968-69).

Les llistes de guanyadors són completes, *excepte* les que corresponen a les primeres fases de les Olimpíades XVI (1978-79) i XX (1983-84). D'aquests dos anys, no n'ha quedat cap constància a la SCM. La SCM demana a qualsevol persona que hagi tingut relació amb alguna de les Olimpíades II, VI, XVI, i XX, tant si ha estat guanyador com participant o professor, i que en tingui informació, que s'adreçi a la Societat i li faci arribar.

Aquesta sol·licitud es fa extensiva a tothom que tingui documents, cartes de notificació, fulls d'enunciats, etc., de qualsevol olimpíada de la I a la XXX. La SCM agrairà totes les informacions que l'ajudin a reconstruir els arxius de les Olimpíades.

Per tal de refrescar la memòria als participants, publiquem a l'apartat de problemes proposats els enunciats de la primera fase de les olimpíades XVI i XX.

Problemes

A partir d'ara, ja no publicarem totes les solucions dels problemes de les olimpíades; només aquelles que siguin especialment originals o interessants. Les solucions oficials, les podreu trobar a l'adreça:

`http://pie.xtec.es/recursos/mates/aqui/agenda.htm#OLIMP`

on, per cert, hi trobareu una font interessantíssima de problemes.

També preguem als nostres lectors que si fan servir Tex o Latex per escriure les seves solucions, les enviïn per *mail* a l'adreça:

`pelegri.viader@econ.upf.es`

així com qualsevol proposta o suggeriment.

Problemes proposats

A33. (Proposat per Jaume Paradís, UPF) En Joan té un dau de sis cares numerades de l'1 al 6. Proposa a l'Anna el següent joc: 1) L'Anna tria un nombre i es llença el dau. En Joan paga a l'Anna tants euros com el valor absolut de la diferència entre la puntuació obtinguda i la triada per l'Anna. 2) L'Anna torna a triar un nombre i paga a en Joan amb el mateix criteri que abans. En Joan té la possibilitat d'assignar probabilitats a les cares del dau de la manera que desitgi. Com ho ha de fer en Joan perquè el joc tingui esperança 0?

A34. (Proposat per Ramón González, IES Pere Calders) Siguin A, B, C els vèrtexs d'un triangle qualsevol. Demostreu que l'incentre I és

$$I = \frac{A|BC| + B|CA| + C|AB|}{|AB| + |BC| + |CA|}.$$

A35. (Proposat per Ramón González, IES Pere Calders) Demostreu que la raó doble r de quatre punts A, B, C, D d'una cònica és igual al quocient dels sinus de la meitat dels angles focals.

$$r = \frac{\sin\frac{AFC}{2}\sin\frac{BFD}{2}}{\sin\frac{AFD}{2}\sin\frac{BFC}{2}}.$$

Problemes dels XVI Jocs Olímpics 1979-1980 [olimpíades perdudes]

Primera sessió

Problema 1. Sabent que 75 bous mengen en 12 dies l'herba d'un prat de 60 àrees, i que 81 bous mengen en 15 dies l'herba d'un altre prat de 72 àrees, trobeu quants bous caldran per menjar en 18 dies l'herba d'un prat de 96 àrees. Se suposa que en els tres prats l'herba té la mateixa altura en el moment d'entrar-hi els bous i que continua creixent uniformement després que hi hagin entrat.

Problema 2. Tenim la paràbola $y = ax^2$ i dos dels seus punts A i B d'abscisses $x_1 < x_2$.

a) Calculeu, en funció de x_1, x_2 l'àrea del triangle ABC, en què C és el punt de la paràbola en el qual la tangent és paral·lela a la recta AB.

b) Aplicant reiteradament el procés anterior, calculeu l'àrea del segment de paràbola limitat per la corda AB.

Problema 3. Siguin z i w dos nombres complexos que compleixen la relació

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

on a, b, c, d són reals. Demostreu que si $ad - bc > 0$, llavors les parts imaginàries de z i w tenen el mateix signe.
(*Observació:* Calculeu $w - \overline{w}$, on $\overline{w}$ és el conjugat de w).

Problema 4. A $\mathbb{R}^3$ es considera el tetràedre $DABC$.

a) Demostreu que les rectes que uneixen cada un dels vèrtexs del tetràedre amb el baricentre de la cara oposada, es tallen en un punt G.

b) Demostreu que els vectors que uneixen el punt D amb cada un dels baricentres de les cares del tetràedre que passen per D, són una base de l'espai vectorial dels vectors lliures de $\mathbb{R}^3$.

c) Calculeu les components del vector DG respecte de la base de l'apartat b).

Segona sessió

Problema 4. A partir d'un significat geomètric de la integral definida, calculeu

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{-x^2 - 2x}\, dx.$$

Problema 5. Demostreu que si els costats d'un triangle estan en progressió geomètrica, la raó està compresa entre

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Problema 6. Al congrés d'un partit polític assisteixen tots els afiliats, que són 2.000 en total. Un periodista observa que, dels presents en una sessió, el $12,1212\ldots\%$ són dones, i el $23,423423\ldots\%$ pertanyen a la branca radical. Es demana el nombre d'afiliats que falten en aquesta sessió.

Problema 7. Es considera la successió recurrent

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \qquad \text{amb} \quad a_1 = 14.$$

Demostreu per inducció que, per a tot $n \geq 1$, el nombre

$$\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$$

és un enter divisible per 4. Com a aplicació, demostreu que existeixen infinits triangles tals que els costats mesuren enters consecutius i l'àrea és també un nombre enter.

Problemes dels XX Jocs Olímpics 1983-1984 [olimpíades perdudes]

Primera sessió

Problema 1. Trobeu totes les funcions f, definides en el conjunt dels nombres reals estrictament positius, que prenen valors reals estrictament positius, i que compleixen

1) $f\big(xf(y)\big) = yf(x)$ per a tot x, y positius.
2) $f(x) \to 0$ si $x \to +\infty$.

Problema 2. Determineu els triangles tals que l'altura i la mitjana concurrents en un vèrtex divideixen l'angle en tres parts iguals.

Problema 3. Demostreu que si la funció $f(x)$ és contínua, positiva i decreixent per a $x \geq 0$, i compleix

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt = S,$$

aleshores

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0.$$

Segona sessió

Problema 4. Donat un triangle ABC, considerem el triangle $A_1B_1C_1$ que té els vèrtexs sobre els costats oposats a A, B i C, respectivament, i els seus costats són perpendiculars als costats del primer triangle. Calculeu la raó de les àrees dels dos triangles en funció dels angles del triangle ABC.

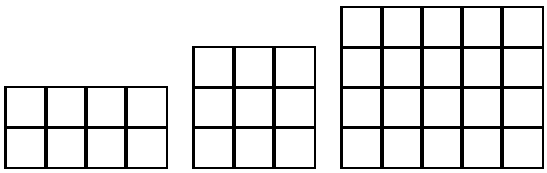
Problema 5. Trobeu el mínim nombre natural m tal que $m!$ és divisible per 7^{1983}.

Problema 6. Donat un triangle equilàter, considerem les rectes que passen pel punt mitjà d'un costat. Estudieu la variació de la longitud dels segments d'aquestes rectes interceptats pel triangle.

Problemes de la XXXV Olimpíada Matemàtica. Fase Catalana. Desembre 1998

Problema 1. Determineu les possibles àrees dels tetraedres que tenen tres arestes de 2 metres i tres arestes de 3 metres.

Problema 2. Disposicions rectangulars com les de la figura:



contenen respectivament 22, 24 i 49 llumins. Algunes disposicions, com la de 24 llumins, són quadrades. A més, amb 22 llumins es poden fer dues disposicions diferents, amb 24 només una i amb cinc llumins no se'n pot fer cap.

i) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer alguna disposició rectangular com les de la figura.

ii) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer alguna disposició quadrada.

iii) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer només una única disposició.

Problema 3. Un bidó cilíndric, amb una massa en buit M, conté una massa m_0 d'oli quan és ple.

El centre de masses (o de gravetat, o baricentre) del bidó ple és en el punt mitjà. Al començar a buidar el bidó el centre de masses

baixa, però quan el bidó és buit, torna a ser en el punt mitjà.

Quina massa d'oli hi ha al bidó quan el centre de masses és en el seu punt més baix?

Problema 4. Ens interessem per les parelles de funcions f, g que compleixen:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$$

a) Trobeu totes aquestes parelles en el cas $f = g$.

b) Trobeu totes les funcions g quan $f(x) = x^n$ amb n enter i positiu.

Problema 5. a) Demostreu que el nombre de cares d'un políedre convex que tenen un nombre senar de costats és parell.

b) Demostreu que la suma dels angles de totes les cares d'un políedre convex és $n \cdot 360$ amb n enter.

Problema 6. Proveu que, si tenim 1998 punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats, aleshores hi ha 666 triangles disjunts que els tenen com a vèrtexs.

Problema 7. Determineu les longituds del costats de tots els triangles rectangles amb costats de longitud entera, als quals es pot inscriure un cercle de radi 6.

Problema 8. Trobeu tots els nombres enters iguals a la suma dels quadrats de les seves xifres.

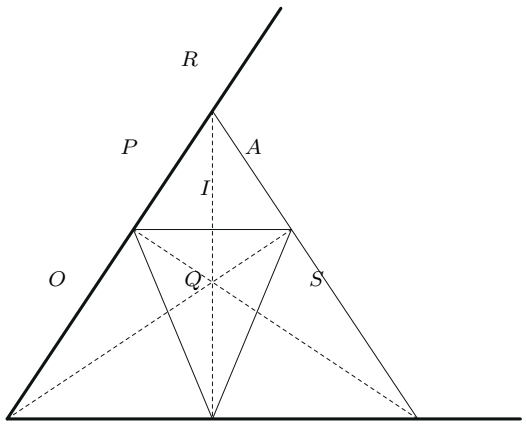
Solucions

Problemes de la XXXIV Olimpíada Matemàtica. Fase catalana.

Problema 1. Si $p(x)$ és un polinomi amb coeficients naturals del qual coneixem $p(1)$ i $p(p(1))$, com podem calcular els seus coeficients?

Solució: (Esteve Casas). Com que $p(1) = a$, tots els coeficients $a_i < a$ (excepte del cas $p(x) = ax^k$, on $p(a) = a^{k+1}$). Llavors els a_i no són altre cosa que els dígits de $p(a)$ en base a.

Problema 2. Tenim una bola en un billar defectuós amb una cantonada que fa un angle lleugerament inferior a 90°. De quantes maneres podem llançar la bola (sense efecte) de manera que toqui aquestes dues bandes i torni a la posició inicial? I si l'angle de la cantonada fos superior a 90°?



Solució: (Esteve Casas). Sigui A la posició inicial de la bola. Si la solució és el recorregut AP, PQ, QA, el punt I ha de ser l'incentre del triangle QAP. Si per A tracem el segment RS, bisectriu exterior de l'angle $\widehat{QAP}$ obtenim un triangle amb ortocentre I. Això ens dóna la manera de trobar la solució del problema: dibuixar per A la recta RS perpendicular a OA i tirar les altures del triangle ORS. Els peus P i Q ens donen els punts de les bandes on podem llançar la bola des d'A. El triangle solució és clarament únic. Ara, $\widehat{QAP} = 180° - 2\alpha$. Per tant, si $\alpha > 90°$, no hi ha solució.

Problema 3. Siguin s i t nombres reals positius tals ques $s < t$. Demostreu que hi ha exactament tres parelles de triangles S i T que compleixen:

- S i T són semblants.
- Les longituds dels costats de S i de T formen progressions aritmètiques de raons s i t, respectivament.
- La longitud d'un costat de S és igual a la longitud d'un costat de T.

Comproveu també que el perímetre d'un dels tres triangles S així obtinguts és igual a la suma dels perímetres del altres dos.

Solució: (De la redacció). Siguin $a, a-s, a+s$ els costats del triangle S i $ka, k(a-s), k(a+s)$ els costats del triangle T. Suposem que $k > 1$ és la raó de semblança entre S i T. Com que

$k(a-s) = ka - t$ resulta que $k = t/s$. Si imposem la igualtat entre un costat de S i un costat de T tenim:

1. En els casos
$$\left.\begin{array}{l} a = ka \\ a - s = k(a-s) \\ a + s = k(a+s) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k = 1;$$
absurd, ja que llavors $t = s$.

2. Els casos $a - s = ka$ i $a - s = k(a+s)$ també són impossibles perquè $a - s$ és el costat més petit de tots. Igualment $k(a+s) = a$ és impossible perquè $k(a+s)$ és el costat més gran.

3. $a = ka - t$. En aquest cas $a(k-1) = t$ i, per tant, $a = t/(k-1)$. El perímetre de S és $p_1 = 3t/(k-1)$.

4. $a + s = ka - t$. Llavors $a(k-1) = s + t$ i $a = (s+t)/(k-1)$. El perímetre de S serà en aquest cas $p_2 = 3(s+t)/(k-1)$.

5. $a + s = ka$. Així, $a(k-1) = s$ i $a = s/(k-1)$. El perímetre de S és $p_3 = 3s/(k-1)$.

Es compleix $p_2 = p_1 + p_3$, tal com ens demanàven.

Altres idees: Hem rebut solucions, essencialment iguals, de David Jiménez (UAB) i d'Esteve Casas.

Problema 4. Sigui C la circumferència més gran que podem posar dins un quadrat Q. Comproveu que donat un nombre $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre $r < \varepsilon$ tal que dins del quadrat podem posar–hi circumferències de radi r (que no es tallin però que poden ser tangents) de manera que la suma de les àrees d'aquests cercles sigui igual a l'àrea del cercle C.

Solució: (David Jiménez, UAB). Sigui $2R$ el costat del quadrat. R serà doncs el radi de la circumferència inscrita, C, que tindrà àrea πR^2. Sigui $\varepsilon > 0$ arbitrari. Si $\varepsilon > R$, podem triar $r = R$ i hem acabat. Sinó, sigui N enter positiu tal que $N > R/\varepsilon$ i sigui $r = R/N$. Disposem N^2 circumferències de radi r dintre de Q de manera que no es tallin (les circumferències inscrites a cada quadrat d'una graella de N^2 quadradets iguals faran perfectament). L'àrea total serà $N^2\pi(R/N)^2 = \pi R^2$.

Altres idees: Hem rebut la mateixa solució d'Esteve Casas.

Problema 5. Trobeu els nombres n que compleixen que la suma dels quadrats de n enters consecutius qualsevulla [*Aquí hi havia un error a l'original publicat al Notícies 8, on vàrem ometre la paraula «consecutius». Us demanem disculpes.*] sigui divisible per n. En particular, digueu quin és el més gran i el més petit d'aquests nombres que tenen dues xifres.

Solució: (Esteve Casas). Si n és un d'aquests nombres, $(k+1)^2 + (k+2)^2 + \cdots + (k+n)^2$ és múltiple de n si, i només si, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ és múltiple de n ja que els altres termes de la suma desenvolupada són nk^2 i $2k + \cdots + 2nk = kn(n+1)$.

Com que
$$1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$
tenim que s'ha de complir que $(n+1)(2n+1) = \dot{6}$. Això implica que n ha de ser imparell: $n = 2s - 1$. Així
$$\frac{(n+1)(n+2)}{6} = \frac{2s(4s-1)}{6} \quad \text{ha de ser enter,}$$
que implica que $s(4s-1) = \dot{3}$. Ara bé, $(2, 4s-1) = 1$. Per tant, $s = \dot{3}$ o $4s - 1 = \dot{3}$ (que equival a dir que $s \equiv \mod 3$).
$$\begin{array}{rcl} s = 3r & \Rightarrow & n = 6r - 1 \\ s \equiv 1 \bmod 3 & \Rightarrow & n = 6r + 1. \end{array}$$
El més petit valor de n de dues xifres haurà de complir
$$10 \le n = 6r - 1 \le 100; \quad \Rightarrow r \ge \frac{11}{6} > 1.$$
El mínim serà quan $r = 2$. El valor de n serà $6 \cdot 2 - 1 = 11$. El més gran valor de n de dues xifres haurà de complir
$$10 \le n = 6r + 1 \le 100; \quad \Rightarrow r < \frac{99}{6} < 17.$$
El màxim serà quan $r = 16$. El valor de n serà $6 \cdot 16 + 1 = 97$.

Problema 6.

a) Demostreu que si el nombre a o el nombre b són naturals, llavors
$$\begin{aligned} 0 = {} & |\sin \pi(x+a) \sin \pi(y+b)| \\ & + |\sin \pi x \sin \pi y| \\ & - |\sin \pi x \sin \pi(y+b)| \\ & - |\sin \pi(x+a) \sin \pi y|. \end{aligned}$$

b) Si tenim un rectangle que es pot descompondre en una unió de rectangles més petits, tots ells de costats paral·lels als del rectangle gran i amb algun dels seus costats de longitud un nombre natural, demostreu que el rectangle gran té algun dels seus costats de longitud un nombre natural.

Solució: (De la redacció).

a) N'hi ha prou amb observar que, si a és natural,

$$\sin \pi(x+a) = \pm \sin \pi x.$$

b) Sigui la funció $f(x,y) = |\sin \pi x \sin \pi y|$. Si sumem aquesta funció en els 4 vèrtexs d'un dels rectangles petits amb signes alternats, o sigui $\boxed{\begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}}$, en virtut de l'apartat anterior, el resultat serà 0 i la suma total serà 0. Per altra banda, en cada encreuament de la forma $\begin{matrix} - & | & \pm \\ + & | & - \end{matrix}$ la contribució de la suma és 0 i el mateix passa en cada punt de la forma $\underline{-}|\underline{+}$ o de la forma $\overline{-}|\overline{+}$, etc. De la suma total, només quedarà la contribució dels 4 vèrtexs del rectangle gran: $(0,0),(a,0),(0,b),(a,b)$ i tindrem doncs,

$$0 = |\sin \pi a \sin \pi b| \;\Rightarrow\; \sin \pi a = 0$$

o

$$\sin \pi b = 0 \;\Rightarrow\; a \text{ o } b \text{ són naturals.}$$

Altres idees: Solució d'Esteve Casas de l'apartat b): Començant pel vèrtex inferior esquerra del rectangle gran, construïm una línia trencada, en forma d'escala de la següent manera. Si el primer rectangle té l'altura de longitud un nombre natural, ens desplacem verticalment fins al vèrtex superior del rectangle petit; si és la base que té longitud natural, ens desplacem horitzontalment fins el vèrtex de l'altre extrem. Així anem fent desplaçant-nos horitzontalment cap a la dreta i verticalment cap a dalt sempre una quantitat natural. Arribarà un moment que la línia trencada construïda tocarà un dels costats del rectangle gran. Si és el costat lateral dret, la base del rectangle gran serà la suma de tots els trams horitzontals de la nostra quebrada. Si arribem al costat de dalt, l'altura del nostre rectangle gran serà la suma dels deplaçaments verticals. En qualsevol dels dos casos, el corresponent costat tindrà longitud entera.

Problema 7. Un tetràedre té les quatre cares que són triangles amb els costats en progressió aritmètica. La raó de la progressió aritmètica de dues cares és la mateixa. Digueu com són aquests tetràedres.

Solució: (De la redacció). Siguin a,b,c i a,b_1,c_1 les dues cares que tenen els costats en progressió aritmètica de raó $d \geq 0$. Siguin b i b_1, c i c_1 arestes oposades i, igualment anomenem a_1 l'aresta oposada a a. Una solució trivial es donaria si $d = 0$ ja que llavors $a = b = c = a_1 = b_1 = c_1$. Ara, si $d > 0$, dues arestes no oposades no poden ser iguals i tenim els següents casos:

1. a és l'aresta més petita de cada una de les cares. Llavors, les arestes del tetràedre són:

$$\begin{array}{lll} a & b = a+d & c = a+2d \\ a_1 & b_1 = a+d & c_1 = a+2d \end{array}$$

2. a és l'aresta mitjana de cada una de les cares. Llavors, les arestes del tetràedre són:

$$\begin{array}{lll} a & b = a-d & c = a+d \\ a_1 & b_1 = a-d & c_1 = a+d \end{array}$$

3. a és l'aresta més gran de cada una de les cares. Llavors, les arestes del tetràedre són:

$$\begin{array}{lll} a & b = a-2d & c = a-d \\ a_1 & b_1 = a-2d & c_1 = a-d \end{array}$$

4. a és l'aresta petita d'una de les cares i la mitjana de l'altra. Llavors, les arestes del tetràedre són:

$$\begin{array}{lll} a & b = a+d & c = a+2d \\ a_1 & b_1 = a+d & c_1 = a-d \end{array}$$

5. a és l'aresta mitjana d'una de les cares i la gran de l'altra. Llavors, les arestes del tetràedre són:

$$\begin{array}{lll} a & b = a-d & c = a+d \\ a_1 & b_1 = a-d & c_1 = a-2d \end{array}$$

6. a és l'aresta petita d'una de les cares i la gran de l'altra. Llavors, les arestes del tetràedre són:

$$(i)\left\{\begin{array}{lll} a & b = a+d & c = a+2d \\ a_1 & b_1 = a-d & c_1 = a-2d \end{array}\right.$$

$$(ii)\left\{\begin{array}{lll} a & b = a+d & c = a+2d \\ a_1 & b_1 = a-2d & c_1 = a-d \end{array}\right.$$

Considerant els triangles a_1, b_1, c i a_1, b, c_1 tenim:

1. $a_1 = a, a_1 = a + 3d/2, a_1 = a + 3d$.
2. $a_1 = a - 3d, a_1 = a, a_1 = a + 3d$.
3. $a_1 = a - 3d, a_1 = a - 3d/2, a_1 = a$.
4. $a_1 = a, a_1 = a + 3d/2, a_1 = a + 3d$.
5. $a_1 = a$.
6. $a_1 = a - 3d, a_1 = a$.
7. (i) No hi ha solució.
8. (ii) $a_1 = a$.

Tenim les solucions:

A) Tres parells d'arestes oposades iguals (totes les cares són iguals).

B) Dues parelles d'arestes oposades iguals (la petita oposada a la gran. Totes les cares de raó d. Cas 1: $a_1 = a + 3d$; cas 4; cas 3: $a_1 = a - 3d$; cas 5: $a_1 = a$.

C) Dues parelles d'arestes oposades iguals (la petita oposada a la tercera. La raó dels triangles de la petita doble de la raó dels triangles de la tercera. d. Cas 1: $a_1 = a + 3d/2$; cas 2: $a_1 = a - 3d$.

D) Dues parelles d'arestes oposades iguals (la gran oposada a la segona. La raó de les cares de la gran doble de la raó dels triangles de la segona. d. Cas 2: $a_1 = a + 3d$; cas 3: $a_1 = a - 3d/2$.

E) Una parella d'arestes oposades iguals (les mitjanes). L'aresta petita oposada a la tercera la gran a la segona. Tres cares amb la mateixa raó i l'altra amb raó doble. Cas 5: $a_1 = a - 3d$; cas 6.

Altres idees: Hem rebut una solució similar d'Esteve Casas.

Problema 8. Resoleu l'equació següent:

$$\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \arctan 3x.$$

Solució: (Esteve Casas). Si fem servir la relació:

$$\tan(a+b+c) = \\ = \frac{\tan a + \tan b + \tan c + \tan a \tan b \tan c}{1 + \tan a \tan b + \tan a \tan c + \tan b \tan c},$$

obtenim,

$$\frac{(x-1) + x + (x+1) + x(x-1)(x+1)}{1 + x(x-1) + x(x+1) + (x-1)(x+1)} = 3x.$$

Una solució és $x = 0$. Un cop simplificada la x, les altres solucions s'obtenen després d'una mica d'àlgebra: $x = \pm 1/2$.

Problemes de la XII Olimpíada Iberoamericana de Matemàtiques

Problema 1. Sigui $r \geq 1$ un nombre real que compleixi la propietat següent:

> *Per a cada parella de nombres enters positius, m i n, amb n múltiple de m, es té que $[nr]$ és múltiple de $[mr]$.*

Demostreu que r és un nombre enter.
Nota: Si x és un nombre real, denotem com $[x]$ el més gran enter que és més petit o igual que x.

Solució: (Néstor Abad). Suposem que r no és enter. Anem a construir enters m i n amb n múltiple de m, tals que $[nr]$ no sigui múltiple de $[mr]$. Sigui r la part fraccionària de r. Com que $0 < r < 1$, sempre existeix un enter k tal que $kr > 1$ i $1/2 < kr < 1$. Si posem $m = k$ i $n = 2k$, per la manera d'escollir k es comprova immediatament que $[2kr]$ no és múltiple de $[kr]$.

Altres idees: Hem rebut solucions d'Esteve Casas, Sergi Elizalde i Joan Martínez.

Problema 2. Amb centre en l'incentre I d'un triangle ABC, tracem una circumferència que talla cadascun dels tres costats del triangle en dos punts: el segment BC en els punts D i P (sent D el més proper a B); el segment CA en els punts E i Q (sent E el més proper a C), i el

segment AB en els punts F i R (sent F el més proper a A).

Sigui S el punt d'intersecció de les diagonals del quadrilàter $EQFR$. Sigui T el punt d'intersecció de les diagonals del quadrilàter $FRDP$. Sigui U el punt d'intersecció de les diagonals del quadrilàter $DPEQ$.

Demostreu que les circumferències circumscrites als triangles FRT, DPU i EQS tenen un únic punt en comú.

Solució: (Sergi Elizalde). Sabem que $\overline{DP} = \overline{RF} = \overline{EQ}$ (per simetria respecte BI) i també que (els arcs) arc(DP)=arc(RF)=arc(EQ). L'angle $\widehat{DUP}$, interior a la circumferència gran és

$$\widehat{DUP} = \frac{\text{arc}(DP) + \text{arc}(EQ)}{2} = \text{arc}(DP).$$

(arc(DP) és l'angle central de l'arc DP en radians.) Per altra banda, $\widehat{DIP}$ =arc(DP) i $\widehat{DIP} = \widehat{DUP}$ implica que $DIUP$ és inscriptible en una circumferència. Anàlogament són inscriptibles $EISQ$ i $FITR$. Ja hem vist que les tres circumferències tenen un punt en comú. Vegem la unicitat.

$$\widehat{DTP} = \frac{\text{arc}(DP) + \text{arc}(RF)}{2} = \text{arc}(DP).$$

O sigui que T pertany a la circumferència $DIUP$. Les circumferències circumscrites a FRT i DPV es tallen en T i en I. Anàlogament, les circumferències circumscrites a EQS i FRT es tallen en S i I i les circumferències circumscrites a EQS i DPV es tallen en I i U. Per tant, l'únic punt d'intersecció de les tres és I. (És obvi que T, U i S no poden ser el mateix punt).

Altres idees: Hem rebut solucions de Nèstor Abad i Esteve Casas.

Problema 3. Siguin $n \geq 2$ un enter i D_n el conjunt de punts (x, y) del pla amb coordenades enteres que compleixen $-n \leq x \leq n$ i $-n \leq y \leq n$.

a) Disposem de tres colors; cadascun dels punts de D_n s'acoloreix amb un d'aquests colors. Demostreu que, independentment de com s'hagi fet la coloració, sempre hi ha dos punts de D_n del mateix color tals que la recta que els conté no passa per cap altre punt de D_n.

b) Trobeu una forma d'acolorir els punts de D_n fent servir quatre colors de manera que si una recta conté exactament dos punts de D_n, llavors aquests dos punts tenen colors diferents.

Solució: (Nèstor Abad).

a) Considerem els punts de D_n :

$$A = (-n, n); \quad B = (n, n-1);$$
$$C = (-n+1, -n+1); \quad D = (n-1, -n)$$

Si només fem servir tres colors, hi ha una parella d'aquests punts del mateix color i la recta que els uneix no talla cap altre punt de D_n. En efecte, els vectors $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{CD}$ tenen els seus components primers entre sí, cosa que impedeix que hi hagi un altre punt de D_n entre la parella de punts. D'altra banda, aquests punts estan prou allunyats entre si com perquè els tros de recta que no cau entremig de la parella pugui passar per un altre punt de D_n.

b) Acolorim D_n de la següent manera:

- Els punts (x, y) amb x parell i y parell, els pinto de color 1.
- Els punts (x, y) amb x parell i y senar, els pinto de color 2.
- Els punts (x, y) amb x senar i y parell, els pinto de color 3.
- Els punts (x, y) amb x senar i y senar, els pinto de color 4.

és clar que d'aquesta manera pintem tots els punts de D_n i, com que dos punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2) d'igual color compleixen que x_1, x_2 són d'igual paritat i y_1, y_2 són d'igual paritat, tenim que la recta que els uneix conté el punt mig

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \in D_n.$$

Per tant, si una recta conté dos punts, aquests forçosament són de colors diferents.

Altres idees: Hem rebut solucions de Esteve Casas, Sergi Elizalde i Joan Martínez.

Problema 4. Sigui n un enter positiu. Considerem la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, on els valors que poden prendre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ són únicament 0 i 1. Sigui $I(n)$ el nombre de $2n$-ades $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ per a les que el valor de la suma és un nombre imparell i sigui $P(n)$ el nombre de $2n$-ades $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ per a les quals la suma pren un valor parell. Demostreu que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n+1}{2^n-1}.$$

Solució: (Esteve Casas). Un producte x_iy_i pot donar parell de tres maneres diferents: $0 \cdot 0$, $1 \cdot 0$, $0 \cdot 1$. i imparell si $1 \cdot 1$. Una suma serà parella si el nombre de termes imparells és parell; en cas contrari serà imparella. Tindrem:

$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1) \cdot 3 + I(n-1) \cdot 1 \\ I(n) &= I(n-1) \cdot 3 + P(n-1) \cdot 1. \end{aligned}$$

Si fem $f(n = P(n)/I(n)$, obtenim

$$f(n) = \frac{3f(n-1)+1}{3+f(n-1)}.$$

A partir d'aquí es demostra per inducció que $f(n) = (2^n+1)/(2^n-1)$.

Altres idees: Hem rebut solucions de Nèstor Abad, Sergi Elizalde, David Jiménez i Joan Martínez.

Problema 5. En un triangle acutangle ABC siguin AE i BF dues altures, i sigui H l'ortocentre. La recta simètrica de AE respecte de la bisectriu (interior) de l'angle en A i la recta simètrica de BF respecte de la bisectriu (interior) de l'angle en B s'intersequen en un punt O. Les rectes AE i AO tallen per segona vegada la circumferència circumscrita al triangle ABC en els punts M i N respectivament. Siguin P, la intersecció de BC amb HN; R, la intersecció de BC amb OM; i S, la intersecció de HR amb OP. Demostreu que $AHSO$ és un paral·lelogram.

Solució: (Sergi Elizalde). Siguin $O(0,0)$, $A(1,a)$, $B(-b,-c)$, $C(b,-c)$.

Amb $a, b, c > 0$, $b^2 + c^2 = 1 + a^2$. Fem $H = (1, y)$, com que $\vec{AC} = (b-1, -c-a)$ i $\vec{BH} = (1+b, y+c)$ i són perpendiculars, tenim $(b-1)(b+1) - y(a+c) - ac - c^2 = 0$, d'on $y = a - 2c$. Tenim doncs, $H(1, a-2c)$, $M(1,-a), N(-1,-a)$. Posem $P = (x, -c)$. Com que $\lambda\vec{NP} = \vec{NH}$ tenim $\lambda(x+1, -c+a) = (2, 2a-2c)$; d'aquí, $\lambda = 2$ i $x = 0$. De manera que $P = (0, -c)$. Anàlogament, si $R(z, -c)$, de $\mu\vec{OR} = \vec{OM}$; deduïm que $z = c/a$ i, per tant, $R = (c/a, -c)$. ($a \neq 0$ perquè si no, C seria recte). Ara, si $S(0, s)$ és la intersecció de les rectes OP i HR, tenim que $\nu(-1+c/a, c-a) = (-1, s+2c-a)$. Deduïm que $s = -2c$ i, per tant, $S = (0, -2c)$. Per últim, $AHSO$ és un paral·lelogram perquè

$$\vec{AH} = (0, -2c) = \vec{OS}\,, \quad \vec{OA} = (1, a) = \vec{SH}.$$

Altres idees: Tenim una solució sintètica d'Esteve Casas però molt extensa.

Problema 6. Sigui $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{1997}\}$ un conjunt de 1997 punts de l'interior d'un cercle de radi 1, sent P_1 el centre del cercle. Per a cada $k = 1, \ldots, 1997$ sigui x_k la distància de P_k al punt de $\mathcal{P}$ més proper a P_k i diferent de P_k. Demostreu que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9.$$

Solució: (Sergi Elizalde). Per a cada punt P_k, $k = 1, 2, \ldots, 1997$, fem un cercle de radi $x_k/2$, amb centre el mateix P_k. D'aquesta manera no hi haurà 2 cercles que es superposin ja que donats dos punts P_i i P_j,

$$\frac{x_i}{2} + \frac{x_j}{2} \leq \frac{d(P_i, P_j) + d(P_i, P_j)}{2} = d(P_i, P_j).$$

Els 1997 cercles dibuixats queden dins la circumferència de centre P_1 i radi $3/2$. Com a molt, un punt P_k podria estar sobre la circumferència de radi 1 i tenir $x_k = 1$, ja que $x_k \leq d(P_1, P_k) = 1$.

Per tant, la suma de les àrees dels 1997 cercles petits serà més petita que la suma de l'àrea del cercle de radi $3/2$:

$$\pi\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + \cdots + \pi\left(\frac{x_{1997}}{2}\right)^2 < \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

D'aquí, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 < 9$.

Altres idees: Tenim solució d'Esteve Casas i de Joan Martínez.

Pelegrí Viader
Universitat Pompeu Fabra